ثانوية موسى بن نص
نيابة ا ميسات

تصحيح الإمتحان الوط ا وحد للبكالوريا
- الدورة العادية 2008 -

شعبة العلوم الرياضية – مادة الرياضيات
ذ : عبدا بن ة
abouzakariya@yahoo.fr

التمرين الأول:

1)- أ- نبين أن $(\mathrm{E},+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

- المصفوفة المنعدمة O تنتمي إلى E $(\mathrm{M}(0,0)=\mathrm{O})$ ، إذن : $\mathrm{E}\neq\varnothing$.

- لكل (λ,μ) من $\mathbb{R}^2$ و لكل $\mathrm{M}(a,b)$ و $\mathrm{M}(c,d)$ من E ، لدينا :

$$\lambda\mathrm{M}(a,b)+\mu\mathrm{M}(c,d)=\mathrm{M}(\lambda a+\mu c,\lambda b+\mu d)$$

إذن : $\lambda\mathrm{M}(a,b)+\mu\mathrm{M}(c,d)\in\mathrm{E}$.

و منه ، فإن $(\mathrm{E},+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

ب- مهما تكن المصفوفة $\mathrm{M}(a,b)$ من E ، لدينا :

$$\mathrm{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&0\end{pmatrix}=a\mathrm{I}+b\mathrm{J}$$

إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(\mathrm{E},+,\cdot)$.

- نبين أن (I,J) أسرة حرة .

ليكن (α,β) من $\mathbb{R}^2$ بحيث : $\alpha\mathrm{I}+\beta\mathrm{J}=\mathrm{O}$.

و لدينا : $\alpha\mathrm{I}+\beta\mathrm{J}=\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ، إذن : $\begin{pmatrix}\alpha&\sqrt{3}\beta\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و هذا يعني أن : $\alpha=\sqrt{3}\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\beta=0$ ، أي أن : $\alpha=\beta=0$.

و منه ، فإن (I,J) أسرة حرة في E .

و بالتالي فإن الأسرة (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathrm{E},+,\cdot)$.

2)- أ- نبين أن E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

لكل $\mathrm{M}(a,b)$ و $\mathrm{M}(c,d)$ من E ، لدينا :

$$\mathrm{M}(a,b)\times\mathrm{M}(c,d)=(a\mathrm{I}+b\mathrm{J})\times(c\mathrm{I}+d\mathrm{J})=ac\mathrm{I}+(bc+ad)\mathrm{J}+bd\mathrm{J}^2$$

و حيث أن : $\mathrm{J}^2=-\mathrm{I}$ ، فإن :

$$\mathrm{M}(a,b)\times\mathrm{M}(c,d)=(ac-bd)\mathrm{I}+(bc+ad)\mathrm{J}=\mathrm{M}(ac-bd,bc+ad)$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ب- نبين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathrm{E}^*,\times)$.

لكل $z=a+ib$ و $z'=c+id$ من $\mathbb{C}^*$ ، لدينا : $z\times z'=(ac-bd)+i(bc+ad)$

إذن : $\mathrm{f}(z\times z')=\mathrm{M}(ac-bd,bc+ad)$

و باستعمال نتيجة السؤال **أ-** ، فإن : $\mathrm{f}(z\times z')=\mathrm{M}(a,b)\times\mathrm{M}(c,d)=\mathrm{f}(z)\times\mathrm{f}(z')$.

إذن f تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathrm{E}^*,\times)$.

نبين أن f تقابلي .

نعلم أن (I,J) أساس ل E ، إذن :

$$(\forall\mathrm{M}\in\mathrm{E}^*)\ ;\ (\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})\ /\ \mathrm{M}=a\mathrm{I}+b\mathrm{J}$$

و بما أن : $a\mathrm{I}+b\mathrm{J}=\mathrm{M}(a,b)=\mathrm{f}(a+ib)$ ، فإن :

$$(\forall\mathrm{M}\in\mathrm{E}^*)\ ;\ (\exists!z=a+ib\in\mathbb{C}^*)\ /\ \mathrm{M}=\mathrm{f}(a+ib)=\mathrm{f}(z)\ .$$

و هذا يعني أن f تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* ، و يتحقق بذلك المطلوب .

3)- نبين أن $(\mathrm{E},+,\times)$ جسم تبادلي .

بما أن $(\mathrm{E},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ، فإن $(\mathrm{E},+)$ زمرة تبادلية .

و من جهة أخرى ، $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية و f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathrm{E}^*,\times)$

إذن $(\mathrm{E}^*,\times)$ أيضا زمرة تبادلية .

abouzakariya@yahoo.fr

و بما أن الجداء توزيعي بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$ و E جزء مستقر من $M_2(\mathbb{R})$ بالنسبة للجداء و الجمع ، فإن الجداء يبقى توزيعيا على الجمع كذلك في E .

و بهذا يكون $(E,+,\times)$ جسما تبادليا .

4)- نحل في E ، المعادلة : $J\times X^3 = I$.

لاحظ أن المصفوفة المنعدمة ليست حلا لهذه المعادلة ، ولدينا :

$$(\forall X\in E^*);\ J\times X^3 = I \Leftrightarrow f^{-1}(J\times X^3) = f^{-1}(I) \Leftrightarrow f^{-1}(J)\times f^{-1}(X^3) = f^{-1}(I)$$

من جهة : $f^{-1}(I)=1$ و $f^{-1}(J)=i$ و $f^{-1}(X^3)=\left(f^{-1}(X)\right)^3$

و بوضع $X=M(x,y)$ و $z=x+iy$ ، فإن : $f^{-1}(X^3)=z^3$ و المعادلة السابقة تكافيء :

$$i\times z^3 = 1 \text{ أي } z^3=-i=i^3 \text{ أي } (z-i)\times(z^2+iz-1)=0$$

هناك ثلاثة حلول هي : $z_0=i$ و $z_1=-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ و $z_2=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

و بالتالي فمجموعة حلول المعادلة $J\times X^3=I$ في E هي :

$$S=\left\{ M(0,1)=J\ ;\ M\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{1}{2}\right)\ ;\ M\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{1}{2}\right) \right\}.$$

■ التمرين الثا :

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(G): iz^2+(a+\overline{a}-i)z-\overline{a}-ia\overline{a}=0$.

1)- أ- مميز المعادلة (G) هو :

$$\Delta=(a+\overline{a}-i)^2+4i(\overline{a}+ia\overline{a})=(a+\overline{a})^2-2i(a+\overline{a})-1+4i\overline{a}-4a\overline{a}$$
$$=a^2+2a\overline{a}+\overline{a}^2-2ia-2i\overline{a}+4i\overline{a}-4a\overline{a}-1$$
$$=a^2-2a\overline{a}+\overline{a}^2-2i(a-\overline{a})-1$$

إذن : $\Delta=(a-\overline{a})^2-2i(a-\overline{a})+i^2=(a-\overline{a}-i)^2$

ب- بما أن مميز المعادلة (G) هو : $\Delta=(a-\overline{a}-i)^2$ ، فإن حليها في المجموعة $\mathbb{C}$ هما :

$$z_1=\frac{i-a-\overline{a}+a-\overline{a}-i}{2i}=-\frac{2\overline{a}}{2i}=i\overline{a}$$

و $z_2=\dfrac{i-a-\overline{a}-a+\overline{a}+i}{2i}=\dfrac{2(i-a)}{2i}=1+ia$.

2)- يكون a حلا للمعادلة (G) إذا و فقط إذا كان $a=i\overline{a}$ أو $1+ia=a$.

بما أن : $1+ia=a\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}$

و $a=i\overline{a}\Leftrightarrow \mathrm{Re}(a)+i\,\mathrm{Im}(a)=\mathrm{Im}(a)+i\,\mathrm{Re}(a)\Leftrightarrow \mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$

فإن : a حل للمعادلة (G) يكافىء $\mathrm{Re}(a)=\mathrm{Im}(a)$.

II- 1)- نضع : $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{(i\overline{a})-a}$ ، حيث $a\in\mathbb{C}$ و $\mathrm{Re}(a)\neq\mathrm{Im}(a)$.

لدينا : $\overline{Z}=\dfrac{\overline{(1+ia)-a}}{\overline{(i\overline{a})-a}}=\dfrac{1-i\overline{a}-\overline{a}}{-ia-\overline{a}}=\dfrac{i+\overline{a}-i\overline{a}}{a-i\overline{a}}=\dfrac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

و تكون النقط $A(a)$ و $B(i\overline{a})$ و $C(1+ia)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $Z\in\mathbb{R}$ أي $Z=\overline{Z}$

بمعنى أن : $\dfrac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}=\dfrac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$ أي أن : $(1+ia)-a=(i-1)\overline{a}-i$

أي : $a-\overline{a}=\dfrac{1+i}{1-i}$ بمعنى أن : $2i\,\mathrm{Im}(a)=\dfrac{(1+i)^2}{2}$ أي أن : $\mathrm{Im}(a)=\dfrac{1}{2}$

لأن : $(1+i)^2=2i$.

abouzakariya@yahoo.fr

2)- نفترض أن : $\text{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$.

أ- لدينا : $R_1(B) = B' \Leftrightarrow z_{B'} - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_b - z_A) \Leftrightarrow b' - a = -i\left(i\overline{a} - a\right)$

إذن : $b' = a - i^2\overline{a} + ia = (1+i)a + \overline{a}$.

و $R_2(C) = C' \Leftrightarrow z_{C'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A) \Leftrightarrow c' - a = i(1 + ia - a)$

إذن : $c' = a + i - a - ia = i(1-a)$.

و بالتالي ، فإن : $b' = (1+i)a + \overline{a}$ و $c' = i(1-a)$.

ب- لدينا : $c' - b' = i - ia - a - ia - \overline{a} = i(1-2a) - \left(a + \overline{a}\right)$

و بما أن E هو منتصف القطعة $[BC]$ ، فإن : $z_E = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1 + ia + i\overline{a}}{2} = \frac{1 + i\left(a + \overline{a}\right)}{2}$

إذن : $z_E - z_A = \frac{1 + i\left(a+\overline{a}\right)}{2} - a = \frac{1 - 2a + i\left(a + \overline{a}\right)}{2}$

و بالتالي ، فإن : $2i(z_E - z_A) = c' - b'$ بمعنى أن : $\frac{c' - b'}{z_E - z_A} = 2i$

إذن ، من جهة $(AE) \perp (B'C')$ لأن : $\frac{c' - b'}{z_E - z_A} \in i\mathbb{R}$.

و من جهة أخرى : $\frac{B'C'}{AE} = \frac{|c' - b'|}{|z_E - z_A|} = \left|\frac{c' - b'}{z_E - z_A}\right| = |2i| = 2$ ، إذن : $B'C' = 2AE$.

■ التمرين الثالث:

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، المعادلة : $(\text{E}):\ 35\text{u} - 96\text{v} = 1$.

1)- لدينا : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 385 - 384 = 1$ ، إذن الزوج $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

2)- إذا كان الزوج (u,v) حلا ل (E) ، فإن : $35(\text{u}-11) - 96(\text{v}-4) = 0$

أي أن : $35(\text{u}-11) = 96(\text{v}-4)$ $(*)$ ، إذن : $96 \mid 35(\text{u}-11)$

و بما أن : $96 \wedge 35 = 1$ فإن حسب مبرهنة كوص : $96 \mid (\text{u}-11)$

إذن : $\text{u} = 11 + 96k \ / \ k \in \mathbb{Z}$

نعوض في $(*)$ فنحصل على : $\text{v} = 4 + 35k$

إذن ، مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \left\{ (11+96k, 4+35k) \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

II- نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ ، المعادلة : $(\text{F}):\ \text{x}^{35} \equiv 2\ [97]$.

1)- ليكن x حلا للمعادلة (F) .

أ- ننجز القسمة الأقليدية ل 97 على الأعداد الأولية p بحيث $p^2 \leq 97$ في الجدول التالي :

97	p	q	r
	2	48	1
	3	32	1
	5	19	2
	7	13	5

حسب الجدول جانبه العدد 97 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي p بحيث : $p^2 \leq 97$.

إذن فهو عدد أولي .

- نضع : $d = \text{x} \wedge 97$.

بما أن 97 عدد أولي ، فإن : $d = 1$ أو $d = 97$.

abouzakariya@yahoo.fr

إذا كان $d=97$ ، فإن : $x\wedge 97=97$ يعني أن 97 يقسم x

إذن : 97 يقسم أيضا x^{35} بمعنى أن : $x^{35}\equiv 0\ [97]$ و هذا غير ممكن لأن $x^{35}\equiv 2\ [97]$.

إذن $d=1$ ، بمعنى أن x و 97 أوليان فيما بينهما .

ب- بما أن 97 عدد أولي و $x\wedge 97=1$ ، فإن حسب مبرهنة فيرما : $x^{97-1}\equiv 1\ [97]$

بمعنى أن : $x^{96}\equiv 1\ [97]$.

ج- لدينا : $x^{35}\equiv 2\ [97]\Rightarrow \left(x^{35}\right)^{11}\equiv 2^{11}\ [97]$ ، إذن : $x^{35\times 11}\equiv 2^{11}\ [97]$

و من جهة أخرى : $35\times 11=1+96\times 4$ إذن : $x^{(1+96\times 4)}\equiv 2^{11}\ [97]$

و لدينا : $x^{96}\equiv 1\ [97]$ (حسب نتيجة السؤال السابق) ، إذن : $x^{(1+99\times 4)}\equiv x\ [97]$

و بالتالي ، فإن : $x\equiv 2^{11}\ [97]$.

2)- إذا كان x عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $x\equiv 2^{11}\ [97]$ ، فإن : $x^{35}\equiv 2^{11\times 35}\ [97]$

و بما أن : $35\times 11=1+96\times 4$ و $2\wedge 97=1\Rightarrow 2^{96}\equiv 1\ [97]$ (حسب مبرهنة فيرما)

فإن : $2^{11\times 35}\equiv 2\ [97]$ ، إذن : $x^{35}\equiv 2\ [97]$ ، بمعنى أن x حل للمعادلة (F) .

3)- المعادلتان $x\equiv 2^{11}\ [97]$ و (F) متكافئتان .

بما أن : $2^{11}=2048=21\times 97+11$ ، فإن : $2^{11}\equiv 11\ [97]$.

إذن : $x\equiv 2^{11}\ [97]\Leftrightarrow x\equiv 11\ [97]\Leftrightarrow x=11+97k\,/\,k\in\mathbb{N}$.

و هذا هو المطلوب .

■ التمرين الرابع:

I- لكل x من $\mathbb{R}_+$ ، نضع : $f(x)=2x-e^{-x^2}$.

1)- أ- نحسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$.

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}-e^{-x^2}=-\lim_{t\to-\infty}e^{-t}=0$.

هذا يعني أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته : $y=2x$.

ب- نحسب $f'(x)$:

$$(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ f'(x)=(2x)'-\left(-x^2\right)'e^{-x^2}=2+2xe^{-x^2}=2\left(1+xe^{-x^2}\right)$$

وبما أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ f'(x)>0$ (لأن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ xe^{-x^2}\geq 0$)

فإن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ ، و جدول تغيراتها كما يلي :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	-1 ↗	$+\infty$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}=0\right)\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

ج- الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ ، إذن f تقبل من $\mathbb{R}_+$ نحو المجال :

$$J=f(\mathbb{R}_+)=\left[f(0);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=[-1;+\infty[$$

و بما أن $0\in J$ فإنه يوجد عنصر وحيد α من $\mathbb{R}_+$ بحيث : $f(\alpha)=0$.

و لدينا : $f(0)=-1<0$ و $f(1)=2-\frac{1}{e}>0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $0<\alpha<1$.

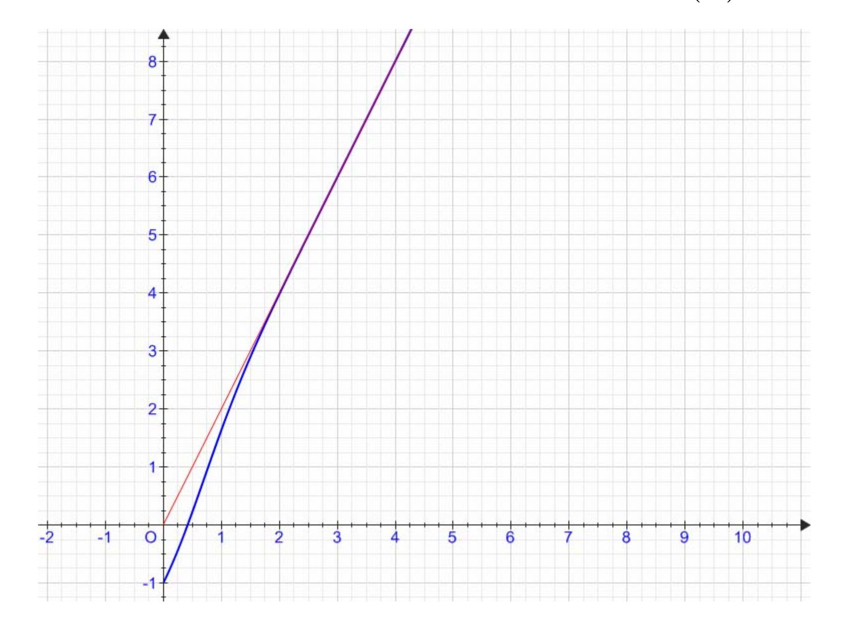
abouzakariya@yahoo.fr

د- دراسة إشارة $f(x)$ على المجال $[0;1]$.

f تزايدية قطعا على المجال $[0;1]$ و تعدم عند نقطة α بحيث : $0<\alpha<1$ ، إذن :

$(\forall x\in[0;\alpha[)\ ;\ f(x)<0$ و $(\forall x\in]\alpha;1])\ ;\ f(x)>0$.

2)- إنشاء المنحنى (C) .



II- نعتبر الدالتين العدديتين φ و g المعرفتين على $\mathbb{R}_+$ كما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\ ;\ x>0\\ \varphi(0)=0\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt\ .$$

1)- الدالة $F:u\mapsto\int_0^u e^{-t^2}dt$ متصلة على $\mathbb{R}_+$ و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و لدينا :

$(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ F'(x)=e^{-x^2}$.

إذن ، بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة F في المجال $[0;x]$ ، لكل x من $\mathbb{R}_+^*$:

يوجد على الأقل عنصر c من المجال $]0;x[$ بحيث : $F(x)-F(0)=x.F'(c)$.

أي أن : $\int_0^x e^{-t^2}dt-0=x.e^{-c^2}$.

و بالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ (\exists c\in]0;x[)\ /\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$.

ب- نأخذ $x=1$ ، إذن : $(\exists c\in]0;1[)\ /\ \int_0^1 e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$

و لدينا : $0<c<1\Rightarrow e^{-c^2}<e^{-0^2}=1$ ، إذن : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$.

2)- أ- نبين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ \int_0^x f(t)dt=\int_0^x(2t)dt-\int_0^x e^{-t^2}dt=\left[t^2\right]_0^x-\int_0^x e^{-t^2}dt=g(x)$.

ب- بما أن f متصلة على $\mathbb{R}_+$ ، فإن الدالة : $x\mapsto\int_0^x f(t)dt$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$

و لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ \left(\int_0^x f(t)dt\right)'=f(x)$

إذن g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ g'(x)=f(x)$.

ج- لدينا : $(\forall x\in]\alpha;1[)\ ;\ g'(x)=f(x)>0$ ، إذن g تزايدية قطعا على المجال $]\alpha;1[$

و من جهة أخرى : $(\forall t\in[0;\alpha[)\ ;\ f(t)<0\Rightarrow g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt<0$

و $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1\Rightarrow g(1)=1^2-\int_0^1 e^{-t^2}dt>0$.

إذن ، حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عنصر وحيد β من المجال $]\alpha;1[$ بحيث : $g(\beta)=0$.

abouzakariya@yahoo.fr

3)- أ- نبين أن φ متصلة على اليمين في الصفر .

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$

لكل t من المجال $]0;x[$ ، لدينا : $0 \le t^2$ ، $-x^2 \le -t^2$ ، إذن : $e^{-x^2} \le e^{-t^2} \le 1$

و بالتالي فإن : $\int_0^x e^{-x^2}dt \le \int_0^x e^{-t^2}dt \le \int_0^x 1dt$

بمعنى أن : $xe^{-x^2} \le \int_0^x e^{-t^2}dt \le x$.

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ e^{-x^2} \le \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt \le 1$

و حيث أن $\lim_{x\to 0^+} e^{-x^2} = 1$ فإن : $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = 1 = \varphi(0)$

إذن φ متصلة على اليمين في الصفر .

ب- نبين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ باستعمال مكاملة بالأجزاء .

نضع : $\begin{cases} u(t) = e^{-t^2} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ ، إذن : $\begin{cases} u'(t) = -2te^{-t^2} \\ v(t) = t \end{cases}$

و منه : $\int_0^x e^{-t^2}dt = \left[te^{-t^2}\right]_0^x + 2\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ ، نضرب الطرفين في $\frac{1}{x}$ فنحصل على :

$\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$.

ج- الدالة $t \mapsto t^2e^{-t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}_+$ ، إذن الدالة $x \mapsto \int_0^x t^2e^{-t^2}dt$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ ;\ \left(\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)' = x^2e^{-x^2}$.

و الدالتين : $x \mapsto \frac{2}{x}$ و $x \mapsto e^{-x^2}$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ، إذن φ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' + \left(\frac{2}{x}\right)'\int_0^x t^2e^{-t^2}dt + \frac{2}{x}\left(\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)'$

أي أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi'(x) = -2xe^{-x^2} - \frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt + \frac{2}{x}x^2e^{-x^2}$

و منه : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$.

د- بما أن φ متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[0;1]$ (φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+$ حسب نتيجة السؤال السابق لأن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi'(x) < 0$)

فإن : $\varphi([0;1]) = [\varphi(1);\varphi(0)] = [\varphi(1);1]$.

ولدينا : $0 < \varphi(1) = \int_0^1 e^{-t^2}dt < 1$ ، إذن : $[\varphi(1);1] \subset [0;1]$

و بالتالي ، فإن : $\varphi([0;1]) \subset [0;1]$.

4)- أ- نبين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ ;\ \int_0^x t^2e^{-t^2}dt \le \frac{x^3}{3}$.

لكل t من المجال $[0;x]$ ، لدينا : $e^{-t^2} \le 1$ ، إذن : $(\forall t \in [0;x])\ ;\ t^2e^{-t^2} \le t^2$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ ;\ \int_0^x t^2e^{-t^2}dt \le \int_0^x t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$.

ب- لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ |\varphi'(x)| = \frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

و بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ ;\ \int_0^x t^2e^{-t^2}dt \le \frac{x^3}{3}$ ، فبضرب طرفي هذه المتفاوتة في $\frac{2}{x^2}$

نحصل على : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ |\varphi'(x)| \le \frac{2}{3}x$.

إذن : $(\forall x \in]0;1[);\ |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$. (لأن : $x \in]0;1[\Rightarrow \frac{2}{3}x \leq \frac{2}{3}$)

ج- لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، لدينا :

$$\varphi(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt = x \Leftrightarrow \int_0^x e^{-t^2}dt = x^2 \Leftrightarrow x^2 - \int_0^x e^{-t^2}dt = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*);\varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

5)- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي :

$u_0 = \frac{2}{3}$ و $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

أ- نبين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 \leq u_n \leq 1$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا : $0 \leq u_0 = \frac{2}{3} \leq 1$.

لنفترض أن : $0 \leq u_n \leq 1$

بما أن : $\varphi([0;1]) \subset [0;1]$ ، فإن : $u_{n+1} = \varphi(u_n) \in [0;1]$

أي أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

و منه : $(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 \leq u_n \leq 1$.

ب- من أجل $n = 0$ ، لدينا :

$u_0 = \frac{2}{3} \in [0;1]$ و $\beta \in [0;1]$ ، إذن : $|u_0 - \beta| \leq |1-0| = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$.

لنفترض أن : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

لدينا : $g(\beta) = 0$ ، إذن حسب **4)- ج-** فإن : $\varphi(\beta) = \beta$.

إذن : $|u_{n+1} - \beta| = |\varphi(u_n) - \varphi(\beta)|$

و بتطبيق متفاوتة التزايدات المنتهية على المجال الذي طرفاه u_n و β ، فإن :

$$|\varphi(u_n) - \varphi(\beta)| \leq \frac{2}{3}|u_n - \beta|$$

و باستعمال إفتراض الترجع $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ، نحصل على $|u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

ج- نبين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و نحدد نهايتها .

بما أن $0 < \frac{2}{3} < 1$ ، فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

إذن ، إنطلاقا من المتفاوتة : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ نستنتج أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

و نهايتها العدد β .

و صدق من قال :

ونيل المطالب بالتمني و لكن تأخذ الدنيا غلابا .

مع متمنياتي لكم بالنجاح في البكالوريا و بالتوفيق في ما تبقى من المشوار .